Physique   Exercice pour non – physiciens

Cet exercice est destiné aux candidats qui n'ONT PAS choisi la Physique comme spécialité principale

Réflexion d'une particule sur un mur mobile

I) On considère le mouvement *classique* unidimensionnel (le long de l'axe z'Oz) d'une particule de masse m. Cette particule n'est soumise à aucune force et en t = 0 se trouve en z = -L avec une vitesse $v_+>0$. Un mur de potentiel impénétrable et de masse M>>m se déplace suivant la loi horaire

$z_w(t) = v_w t$ où $v_w>0$

Discuter le mouvement de la particule pour t > 0 suivant les valeurs de v_+ et de v_w. On supposera que les collisions de la particule de masse m sur le mur de masse M sont élastiques et l'on se placera dans la limite $\frac{m}{M} \to 0$.

II) On s'intéresse désormais au mouvement *quantique* d'une telle particule et l'on rappelle que l'onde matérielle $\psi(z,t)$ vérifie l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(z,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2} + V(z,t)\psi(z,t)$$

où V(z,t) représente l'énergie potentielle de la particule au point z et à l'instant t.

II1) Quelles sont les solutions séparables en z et t de cette équation lorsque V(z,t) = 0 ?

II2) Comment se traduit mathématiquement pour $\psi(z,t)$ la condition que le mur de potentiel situé en $z_w(t)$ à l'instant t est impénétrable ?

II3) On effectue le changement de variables :

$$t = \tau \ , \ z = z_w + \xi$$

Quelle est l'équation vérifiée par $\psi(\xi,\tau)$? Quelles sont les conditions aux limites vérifiées par $\psi(\xi,\tau)$?

II4) On cherche une solution de cette équation sous la forme :

$$\psi(\xi,\tau) = a(\tau)b(\xi)$$

Montrez que les fonctions $a(\tau)$ et $b(\xi)$ peuvent être choisies comme des exponentielles ayant des arguments imaginaires $- i\omega\tau$ et $ik\xi$ où k et ω sont liés par une relation que l'on spécifiera.

II5) En déduire que $\psi(z,t)$ peut s'écrire :

$$\psi(z,t) = A\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)\left(e^{ik_+(z-v_w t)} - e^{ik_-(z-v_w t)}\right) \qquad (2)$$

où E, k_+, k_- seront précisés. Quelle est l'interprétation physique des deux termes apparaissant dans (2) ?

II6) Evaluer $|\psi(z=0,t)|^2$. Discussion.

Physics Exercise for non – physicists

This exercise is meant for the candidates who HAVE NOT chosen Physics as their main specialty

Reflexion of a particle on a mobile wall

I) We consider the uni-dimensional *classical* motion (along the z'Oz axis) of a particle with mass m. This particle experiences no force and at t = 0 is located at z = -L with a velocity $v_+ > 0$. An impenetrable potential wall with mass M>>m moves according to the law :

$z_W(t) = v_W t$

where $v_W > 0$. Discuss the particle motion when t > 0 depending on the values of v_+ and v_W. You will assume that the collisions of the particle with mass m on the wall with mass M are elastic and you will have to take the limit $\frac{m}{M} \to 0$.

II) We look now at the *quantum* motion of that particle and we recall that the material wave ψ(z,t) fulfills the Schrödinger equation :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(z,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2} + V(z,t)\psi(z,t)$$

where V(z,t) represents the potential energy of the particle at the point z and time t.

II,1) Find the solutions that are separable in z and t of this equation when V(z,t) = 0 ?

II2) How does the fact that the wall located at $z_W(t)$ at time t is impenetrable translates for the function ψ(z,t) ?

II3) We make the change of variables :

$$t = \tau \ , \ z = z_w + \xi$$

What is the equation fulfilled by ψ(ξ,τ)? Which are the boundary conditions fulfilled by ψ(ξ,τ)?

II4) We look for a separable solution of this equation like:

$$\psi(\xi,\tau) = a(\tau)b(\xi)$$

Show that the functions a(τ) and b(ξ) can be chosen as exponentials with imaginary arguments - iωτ and ikξ where k and ω are linked by a relationship to be specified.

II5) Deduce that ψ(z,t) can be written as:

$$\psi(z,t) = A\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)\left(e^{ik_+(z-v_w t)} - e^{ik_-(z-v_w t)}\right) \qquad (2)$$

where E, k_+, k_- are three constants to be specified. What is the physical interpretation of the two terms that show up in the large bracket in eq.(2) ?

II6) Compute $|\psi(z=0,t)|^2$. Discuss.